Seminar in Finanzmathematik: Trinomialbäume und explizite Finite-Differenzen-Verfahren

Oliver Faulhaber

21. Januar 2002

Approximation des Black-Scholes-Modells durch einen rekombinierenden Trinomialbaum: im Gegensatz zum Binomialbaum besteht hier zusätzlich die Möglichkeit, dass sich der Aktienpreis nicht verändert.

Genaue Beschreibung des Modells:

- Es gilt den Aktienpreisprozess $P_t = P_0 \times e^{(r-\sigma^2/2)/t+\sigma W_t}$ zu approximieren
- Intervall $[0, T]$ wird diskretisiert mit Schrittweite $\Delta t := \frac{T}{n}$
- $P^{(n)}(i)$ bezeichne den zugehörigen zeitdiskreten Aktienpreisprozess zum Zeitpunkt $\frac{iT}{n}$, $p := P^{(n)}(0) = P_0$.
- $P^{(n)}(i)$ steigt zum Zeitpunkt $\frac{(i+1)T}{n}$ mit Wahrscheinlichkeit q_1 auf $uP^{(n)}(i)$, fällt mit Wahrscheinlichkeit q_2 auf $\frac{1}{u}P^{(n)}(i)$ oder bleibt mit Wahrscheinlichkeit $q_3 = 1 - q_1 - q_2$ (> 0, sonst Binomialbaum) unverändert.
- Für den Aktienpreis zum Zeitpunkt T gibt es somit 2n+1 Möglichkeiten: $(\frac{1}{u})^n P^{(n)}(0), \dots, u^n P^{(n)}(0)$
- Aus Arbitragegründen gilt für u: $\frac{1}{u} < e^{(rT/n)} < u$ (sonst leihe Geld und lege es in Aktien an bzw. short-sell Aktie und lege Geld in Bond an)

Aus dem Satz von Donsker (vergleiche dazu vorherigen Vortrag) folgt nachfolgender

Satz 1 *$P^{(n)}(i)$ konvergiert schwach gegen Aktienpreis-Prozess im risiko-neutralen Markt , d.h. für alle glm. stetigen und beschränkten Funktionale f gilt*

$$E\Big(f\big(P^{(n)}(i)\big)\Big) \longrightarrow E\Big(f(P_t)\Big) \quad \text{für } n \to \infty$$

falls die ersten beiden Momente der Zuwächse von $ln\big(P_t\big)$ zwischen $\frac{iT}{n}$ und $\frac{(i-1)T}{n}$ mit denen der Zuwächse von $ln\big(P^{(n)}(i)\big)$ übereinstimmen.

Diese Annahme führt zu den Gleichungen

$$(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t = ln(u)q_1 + ln(\frac{1}{u})q_2 \tag{1}$$
$$(r-\frac{\sigma^2}{2})^2(\Delta t)^2 + \sigma^2(\Delta t) = ln(u)^2 q_1 + ln(\frac{1}{u})^2 q_2 \tag{2}$$

Das (lineare) Gleichungssystem lässt sich zu gegebenem $u > 0$ lösen. Eine andere Methode nach Cox-Ross-Rubinstein: Man wähle $\Delta x := \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}$ für ein $\lambda \geq 1$ und setze

$$u := e^{\Delta x} \tag{3}$$

Dann vernachlässigt man die quadratischen Terme in (2) und erhält

$$\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}(q_1 - q_2) = (r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{4}$$
$$\lambda^2\sigma^2\Delta t(q_1 + q_2) = \sigma^2\Delta t \tag{5}$$

und daraus wiederum

$$q_1 = \frac{1}{2}\Big((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{\lambda^2}\Big) \tag{6}$$
$$q_2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda^2} - (r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t}\Big) \tag{7}$$

Anmerkungen:

- Für kleines Δt liegen q_1, q_2 und q_3 im Intervall $(0, 1)$
- Wählt man $\lambda = 1$ erhält man wiederum einen Binomialbaum

Algorithmus: Es sei $B = f(P_T)$, d.h. die Endauszahlung hänge nur von P_T und nicht vom Pfad selbst ab. (Ansonsten, z.B. bei einem Amerikanischen Call, ist die Betrachtung eines nicht-rekombinierbaren Baumes notwendig $\Rightarrow$ exponentiell steigender Rechenaufwand). B_n bezeichne $f\big(P^{(n)}(n)\big)$.

① zu $n \gg 1$ für $P^{(n)}(i)$ mit u, q_1, q_2 wie oben erstelle geeigneten Trinomialbaum

② Berechne erwartete abgezinste Endzahlung $E^{(n)}(e^{-rT}B_n)$ als Näherung für $E_Q(e^{-rT}B)$

In Schritt ② wird dabei analog zum Binomialbaum durch Rekursion verfahren. Hierzu seien

$$X^{(n)}(i) := ln\big(P^{(n)}(i)\big)$$
$$V^{(n)}\big(i\Delta t, X^{(n)}(i)\big) := E^{(n)}\big(e^{-r(T-i\Delta t)}B_n \mid P^{(n)}(i)\big)$$

Dann berechnet man mit Hilfe von $V^{(n)}\big(T, X^{(n)}(n)\big) = f\Big(exp\big(X^{(n)}(n)\big)\Big)$

$$V^{(n)}\big(i\Delta t, X^{(n)}(i)\big) = \Big[q_1 V^{(n)}\big((i+1)\Delta t, X^{(n)}(i) + \Delta x\big) + \\ + q_3 V^{(n)}\big((i+1)\Delta t, X^{(n)}(i)\big) + q_2 V^{(n)}\big((i+1)\Delta t, X^{(n)}(i) - \Delta x\big)\Big] e^{-r\Delta t} \tag{8}$$

fr $i = n-1, \ldots, 0$ und schließlich

$$E^{(n)}(e^{-rT} B_n) = V^{(n)}(0, p)$$

Anmerkungen:

- $V^{(n)}\big(i\Delta t, X^{(n)}(i)\big)$ ist die erwartete Endauszahlung auf $i\Delta t$ abgezinst, wenn der Aktienkurs zur Zeit $i\Delta t$ den Wert $P^{(n)}(i)$ annimmt.
- Konvergenz folgt aus Satz von Donsker, gleichgradige Integrierbarkeit muss im Einzelfall nachgeprüft werden (vergleiche dazu vorherigen Vortrag).

Beziehung zum expliziten Finite-Differenzen-Verfahren: Wie in der Vorlesung [**?**] beschrieben, löst der Optionspreis unter bestimmten Umständen das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V_{pp} + rpV_p - rV = 0, (t,p) \in [0,T] \times (0,\infty) \\ V(T,p) = f(p), p > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Setzt man $x := ln(p)$ und $\tilde{V}(t,x) := V(t,p)$ so erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{V}_{xx} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tilde{V}_x - r\tilde{V} = 0 \quad (t,x) \in [O,T] \times \mathbf{R} \\ \tilde{V}(T,x) = f(e^x) \quad x \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{10}$$

Ein populärer Ansatz für eine numerische Lösung von (10) ist das explizite Finite-Differenzen-Verfahren: Raum und Zeit werden diskretisiert, partielle Ableitungen werden dann durch entsprechende Differenzenquotienten ersetzt.

$$\begin{aligned} \Delta_t \tilde{V}^{(n)}(t,x) &:= \frac{\tilde{V}^{(n)}(t+\Delta t, x) - \tilde{V}^{(n)}(t,x)}{\Delta t} \\ \Delta_x \tilde{V}^{(n)}(t,x) &:= \frac{\tilde{V}^{(n)}(t+\Delta t, x+\Delta x) - \tilde{V}^{(n)}(t+\Delta t, x-\Delta x)}{2\Delta x} \\ \Delta_{xx} \tilde{V}^{(n)}(t,x) &:= \frac{\tilde{V}^{(n)}(t+\Delta t, x+\Delta x) - 2\tilde{V}^{(n)}(t+\Delta t, x) + \tilde{V}^{(n)}(t+\Delta t, x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

Mit $t_i := i\Delta t$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ und $X(j) := ln(p) + j\Delta x$ für $j \in \mathbf{Z}$ erhält man

$$\tilde{V}^{(n)}\big(t_i, X(j)\big) = \tag{11}$$
$$\Big\{\Big(\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big)\tilde{V}^{(n)}(t_i+\Delta t, X(j)+\Delta x)$$
$$+\Big(1-\sigma^2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\Big)\tilde{V}^{(n)}(t_i+\Delta t, X(j))$$
$$+\Big(\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}-\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big)\tilde{V}^{(n)}(t_i+\Delta t, X(j)-\Delta x)\Big\}\frac{1}{1+r\Delta t}$$

Da zur Zeit T alle Werte von $\tilde{V}^{(n)}(T,x)$ bekannt sind, kann man aus der expliziten Darstellung (11) die Werte für $\tilde{V}^{(n)}(T-\Delta t, x)$ berechnen. Per Rückwärtsinduktion mit Schrittlänge Δt gelangt man so zur Zeit $t=0$ und erhält $\tilde{V}^{(n)}(0,x)$ als Näherung für den Optionspreis $\tilde{V}(0,x)$

Anmerkungen:

- Vergleich mit (8) zeigt, dass die Rekursion im Trinomialbaum als spezielles Finite-Differenzen-Verfahren aufgefasst werden kann, wenn man den Unterschied der beiden Abzinsfaktoren $e^{-r\Delta t}$ (continuos compounding) und $\frac{1}{1+r\Delta t}$ vernachlässigt.
- Explizites Finite-Differenzen-Verfahren ist anfällig für Instablitäten, Konvergenz von $\tilde{V}^{(n)}(0,x)$ gegen $\tilde{V}(0,x)$ ist aber genau dann gewährleistet, wenn

  $$0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \tag{12}$$

  gilt, d.h. die Zeitdiskretisierung fein genug ist. Dies geht konform mit der Forderung in (6), dass $\lambda = \frac{\Delta x}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \geq 1$ gelten soll
- Dies zeigt Zusammenhang zwischen stochastischen Methoden und Methoden der PDE.

Literatur

[1] Korn/Korn: *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*, Vieweg (1999).

[2] R. Korn: *Finanzmathematik*, Vorlesungs-Mitschrift (SS 2001).

[3] J. Hull: *Optionen, Futures und andere Derivate*, Oldenbourg (2001).

Anhang: Ausführliche Berechnungen

Zu (1): Laut Annahme stimmen $E\Big(ln\big(P(\frac{iT}{N})\big)-ln\big(P(\frac{(i-1)T}{n})\big)\Big)$ und $E\Big(ln\big(P^{(n)}(i)\big)-ln\big(P^{(n)}(i-1)\big)\Big)$ überein. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&E\Big(ln\big(P(\frac{iT}{N})\big)-ln\big(P(\frac{(i-1)T}{n})\big)\Big)\\
&= E\Big(ln\big(p\times e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(iT/n)+\sigma W_{(iT/n)}}\big)-ln\big(p\times e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})((i-1)T/n)+\sigma W_{((i-1)T/n)}}\big)\Big)\\
&= E\Big(ln(p)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{iT}{n}+\sigma W_{(iT/n)}-\big(ln(p)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{(i-1)T}{n}+\sigma W_{((i-1)T/n)}\big)\Big)\\
&= E\big((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n})\big)+\sigma E\big(W_{(iT/n)}-W_{((i-1)T/n)}\big)\\
&= (r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t
\end{aligned}$$

wegen $W_{(iT/n)}-W_{((i-1)T/n)}\sim N(0,\frac{T}{n})$. Desweiteren gilt

$$E\Big(ln\big(P^{(n)}(i)\big)-ln\big(P^{(n)}(i-1)\big)\Big)=ln(u)\cdot q_1+ln(\frac{1}{u})\cdot q_2+0\cdot q_3$$

womit (1) gezeigt wurde.

Zu (2): Analog dazu benutzt man die übereinstimmenden zweiten Momente, um

$$\begin{aligned}
&E\Big(ln\big(P(\frac{iT}{N})\big)-ln\big(P(\frac{(i-1)T}{n})\big)\Big)^2\\
&= E\Big(ln(p)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{iT}{n}+\sigma W_{(iT/n)}-\big(ln(p)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{(i-1)T}{n}+\sigma W_{((i-1)T/n)}\big)\Big)^2\\
&= E\big((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}\big)^2+(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{n}\sigma E\big(W_{(iT/n)}-W_{((i-1)T/n)}\big)+\sigma^2 E\big(W_{(iT/n)}-W_{((i-1)T/n)}\big)^2\\
&= (r-\frac{\sigma^2}{2})^2\Delta t^2+\sigma^2\Delta t
\end{aligned}$$

und

$$E\Big(ln\big(P^{(n)}(i)\big)-ln\big(P^{(n)}(i-1)\big)\Big)^2=ln(u)^2\cdot q_1+ln(\frac{1}{u})^2\cdot q_2+0\cdot q_3$$

zu erhalten, womit (2) hergeleitet wurde.

Zu (4): Mit den eingeführten Bezeichnungen erhält man aus (1)

$$\begin{aligned}(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t = ln(u)q_1 + ln(\frac{1}{u})q_2 &= \Delta x q_1 - \Delta x q_2 \\ &= \Delta x(q_1 - q_2) = \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}(q_1 - q_2)\end{aligned}$$

Zu (5): Analog zu (4) erhält man aus (2)

$$(r - \frac{\sigma^2}{2})^2(\Delta t)^2 + \sigma^2(\Delta t) = ln(u)^2 q_1 + ln(\frac{1}{u})^2 q_2 = \Delta x^2 q_1 + \Delta x^2 q_2 = \lambda^2\sigma^2\Delta t(q_1 + q_2)$$

und nach Vernachlässigung des (in Δt) quadratischen Terms ergibt sich (5).

Zu (6)+(7): Aus (5) erhält man

$$(q_1 + q_2) = \frac{1}{\lambda^2}$$

und anschließendes Einsetzen in (4) liefert

$$q_1 = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t} + q_2 = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t} + (\frac{1}{\lambda^2} - q_1)$$

und somit schließlich (6). Die Lösung für q_2 ergibt sich durch erneutes Einsetzen:

$$q_2 = \frac{1}{\lambda^2} - q_1 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{\lambda^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\lambda^2} - (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t}\Big)$$